Relevante intuitionistische Systeme vom E-Typ*

Yaroslav Shramko

1. Die Folgebeziehung erster und höherer Stufen

Die in der klassischen Logik gültige Prinzipien "*ex falso quodlibet*" und "*verum ex quodlibet*" nennt man oft "Paradoxien der klassischen Folgebeziehung und der materialen Implikation". Diese Paradoxien sind aber nicht nur für die Folgebeziehung gültig, die in der klassischen Logik verwendet wird. Beispielsweise ist die *intuitionistische Logik* eine der wichtigsten nichtklassischen Logiken, und ihre Folgebeziehung (sowie die intuitionistische Implikation) ist genauso paradox wie die klassische. Wir stehen also vor der Aufgabe, in diese Logik die relevante Folgebeziehung "hineinzubauen". In [Shramko1998], [Shramko2000a], [Shramko2000b] wurde der Begriff der relevanten Folgebeziehung der *ersten Stufe* für intuitionistische Formeln eingeführt und ein axiomatisches System vorgeschlagen, das diesen Begriff formalisieren soll. Eine weitere Aufgabe besteht nun darin, Behauptungen über die Folgebeziehung *höherer* als erster Stufe zu untersuchen.

Zunächst will ich aber auf ein interessantes Problem eingehen, und zwar das, ob es überhaupt rechtmäßig ist, über eine Folgebeziehung höherer als erster Stufe zu sprechen, ob es eine solche Folgebeziehung überhaupt gibt. Einige Autoren bezweifeln, dass es methodologisch korrekt ist, eine Folgebeziehung der zweiten, dritten usw. Stufe zu betrachten. Dabei stellen sie die folgende Argumentation auf: Die Folgebeziehung ist keine objektsprachliche Verknüpfung, sondern eine metasprachliche Beziehung zwischen Aussagen. Auf der syntaktischen Ebene kann man diese Beziehung mit Hilfe eines besonderen Metaoperators darstellen, der selbst kein Element der Objektsprache ist, beispielsweise mit "$\vdash$". Der Wirkungsbereich eines solchen Operators besteht aus den *objektsprachlichen* Aussagen. Deswegen sind die Ausdrücke, in denen der Metaoperator iteriert vorkommt (z. B. $(A \vdash B) \vdash (C \vdash D)$), einfach syntaktisch nicht korrekt gebildete Ausdrücke.

In [Sinowjew&Wessel1975] werden Behauptungen über die Folgebeziehung $(A \vdash B)$ konsequent als elementare Aussagen behandelt, wobei der "Folgebeziehungsoperator" - das $\vdash$ - nicht als Operator im eigentlichen Sinne, sondern als zweistelliges Prädikat aufgefasst wird, während A und B als besondere Termini - "die Aussage A" und "die Aussage B" verstanden werden. Es wird ausdrücklich betont:

> "Es wäre also falsch, Aussagen über die logische Folgebeziehung der einen Aussage aus anderen als zusammengesetzte Aussagen zu betrachten. In $A \vdash B$ wird nicht über die Gegenstände

> gesprochen, auf die sich A und B beziehen, sondern über den Zusammenhang der Aussagen A und B als besonderen Gegenständen. Aus A und B gebildete zusammengesetzte Aussagen beziehen sich auf den gleichen Gegenstandsbereich wie die Aussagen A und B. Eine Aussage $A \vdash B$ hingegen steht in keinerlei Beziehung zu dem Gegenstandsbereich, auf den sich A und B beziehen. Den Gegenstandsbereich, auf den diese Aussage sich bezieht, bilden vielmehr A und B selbst als besondere wahrnehmbare Gegenstände." ([Sinowjew&Wessel1975], S. 210)

Diese Argumentation scheint recht gut begründet zu sein. Dennoch schließen solche Argumente durchaus nicht die Möglichkeit aus, Folgebeziehungen höherer als erster Stufe, d.h. Behauptungen über die Folgebeziehung zwischen Behauptungen über Folgebeziehungen, zu betrachten. Schließlich sind wir in der Lage, nicht nur mit Prädikaten der ersten, sondern auch mit denen der zweiten, dritten usw. Stufe umzugehen. Wenn die Bemerkung richtig ist, dass die Interpretationsbereiche für Aussagen über die Folgebeziehung selbst und für Aussagen, die in Aussagen über die Folgebeziehung vorkommen, verschieden sind, dann sollte dieser Unterschied zwischen den Bereichen eine *semantische Darstellung* finden.

Ein weiteres Argument zugunsten von Systemen der Folgebeziehung höherer als erster Stufe ist mit den üblichen Systemen des Natürlichen Schießens verbunden. Wir sollten uns darüber im klaren sein, dass wir uns im Rahmen dieser Konstruktionen *tatsächlich* auch mit der Folgebeziehung wenigstens der *zweiten* Stufe beschäftigen (sogar dann, wenn wir nicht alle Vorkommen der Implikation als Folgebeziehung interpretieren). Die Schlussregeln für *indirekte* Beweise stellen nichts anderes als Aussagen über die Folgebeziehung zweiter Stufe dar, weil unter Anwendung solcher Regeln ein Übergang von Ableitungen (Behauptungen über die Folgebeziehung) zu anderen Ableitungen geschieht. Betrachten wir beispielsweise die indirekte Einführungsregel der Negation. Nichtformal kann diese Regel folgendermaßen formuliert werden:

> Wenn aus einer Menge von Annahmen Γ und der Aussage A ein Widerspruch (eine Aussage B gemeinsam mit ihrer Negation) ableitbar ist, so können wir darauf schließen, dass es eine Ableitung der Aussage ~A aus den Annahmen Γ gibt.

Formal ist das:

$$\Gamma, A \vdash B; \Gamma, A \vdash {\sim}B \Rightarrow \Gamma \vdash {\sim}A.$$

Das Zeichen '$\Rightarrow$' repräsentiert hier offenbar nichts anderes als die Folgebeziehung der zweiten Stufe, und der einzige Unterschied zu '$\vdash$' besteht allein darin, dass '$\Rightarrow$' auf der Menge der Aussagen über die Folgebeziehung interpretiert ist, während '$\vdash$' dies nicht ist. Es bleibt aber *dieselbe* Folgebeziehung - eine Beziehung zwischen Aussagen. Worum es in den Aussagen selbst geht, spielt hier keine besondere Rolle, und es wäre eben auch nicht richtig, allein *nur* aufgrund eines Unterschieds in den Interpretationsbereichen zu behaupten, dass sich die Folgebeziehung der zweiten Stufe prinzipiell von der Folgebeziehung der ersten Stufe unterscheidet. Wenn es beispielsweise in den Aussagen A und B um Mathematik geht und in den Aussagen C und D um Literatur, so bedeutet das nicht, dass die Folgebeziehung zwischen A und B irgendeine "andere" Folgebeziehung ist als die Folgebeziehung zwischen C und D. Die Gesetze der Logik hängen nicht vom Interpretationsbereich ab.

Übrigens bilden sogar die Systeme der logischen Folgebeziehung erster Stufe die Folgebeziehung der zweiten Stufe ab, weil die *Schlussregeln* solcher Systeme Behauptungen über die Folgebeziehung zwischen Aussagen über die Folgebeziehung und anderen solchen Aussagen sind. Wenn wir aber die Folgebeziehung zweiter Stufe zulassen, so lassen wir implizit auch Folgebeziehungen der dritten, vierten, usw. Stufe zu. Dies gilt wegen eines interessanten Resultats von R. Meyer (siehe [Meyer1979]), der zeigte, dass die Folgebeziehung zweiter Stufe genügt, um Folgebeziehungen beliebiger Stufen darstellen zu können. Jede Formel über eine Folgebeziehung höherer als zweiter Stufe lässt sich nämlich in eine Formel zweiter Stufe umwandeln, die genau dann beweisbar ist, wenn die ursprüngliche Formel beweisbar ist.

Was selbstverständlich noch bestritten werden kann, ist die *Zweckmäßigkeit* des Aufbaus von Systemen der Folgebeziehung höherer als erster Stufe. Wie gerade oben bemerkt wurde, drücken die Systeme erster Stufe ja auch die Folgebeziehung der zweiten Stufe (und damit auch die Folgebeziehung höherer Stufen) aus! Mit anderen Worten: Es können alle Prinzipien der Deduktion adäquat allein durch die Systeme der Folgebeziehung der ersten Stufe dargestellt werden. Die Systeme der Folgebeziehung höherer Stufen drücken die Schlussregeln der Systeme erster Stufe einfach durch die entsprechenden Formeln aus. So kann die oben beschriebene Einführungsregel der Negation als die folgende Formel aufgeschrieben werden:

$$((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow {\sim}B)) \rightarrow {\sim}A.$$

Dennoch haben Systeme, die sich mit der Folgebeziehung höherer Stufen beschäftigen, bestimmte theoretisch-methodologische Vorteile und stellen zahlreiche sowohl technische als auch inhaltliche Mittel zur Verfügung, die die Aufklärung wichtiger Merkmale der Folgebeziehung ermöglichen. Deswegen lohnt es sich, diese Art der Analyse auch auf die Folgebeziehung in der intuitionistischen Logik zu erweitern.

In diesem Beitrag werden also einige Systeme aufgebaut, die eine relevante logische Folgebeziehung zwischen Ausdrücken der Sprache explizieren, die man aus der Sprache der intuitionistischen Aussagenlogik gewinnt, indem man die intuitionistische Implikation "$\supset$" durch eine intensionale ("relevante") Implikation "$\rightarrow$" ersetzt. Diese intensionale Implikation soll die *logische Folgebeziehung* repräsentieren. Deswegen werde ich mich an dem relevanzlogischen System **E** (*of entailment*) orientieren (siehe [Entailment1975]), und einige relevanzintuitionistische Kalküle vorschlagen, die wesentlich *Systeme vom E-Typ* sind.

2. Das Minimalsystem der relevanten Folgebeziehung

Den Ausgangspunkt weiterer Analysen bildet die positive Aussagenlogik **E**+, deren Sprache - L(E+) - unendlich viele Aussagenvariablen, die logischen Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und Klammern als Hilfszeichen einschließt. Als Axiomenschemata und Schlussregeln können die folgenden ausgewählt werden:

E1. $A \rightarrow A$
E2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
E3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
E4. $(A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow D)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow D))$
E5. $(A \wedge B) \rightarrow A$
E6. $(A \wedge B) \rightarrow B$
E7. $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$
E8. $A \rightarrow (A \vee B)$
E9. $B \rightarrow (A \vee B)$
E10. $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$
E11. $(A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$
E12. $(NA \wedge NB) \rightarrow N(A \wedge B)$,
wobei NA eine Abkürzung für $(A \rightarrow A) \rightarrow A$ ist
RE1. $A, A \rightarrow B \Rightarrow B$
RE2. $A, B \Rightarrow A \wedge B$

Die Semantik für **E**+ wurde von Routley und Meyer in [Routley&Meyer1972] ausgearbeitet. Ein Modell für das System **E**+ (ein E+ - Modell) ist eine Struktur $< 0, S, R, \Vdash >$, wobei S eine nichtleere Menge von "möglichen Welten" ist, $0 \in S$ gilt und R eine dreistellige Relation auf S ist, die für beliebige a, b, c, d, e $\in$ S die folgenden Postulate erfüllt:

p1. R0aa
p2. Ra0a
p3. (Rabc und Rcde) $\Rightarrow \exists$ x(Radx und Rbxe)
p4. Rabc $\Rightarrow \exists$ x(Rabx und Rxbc)
p5. (R0ad und Rdbc) $\Rightarrow$ Rabc

Die Relation $\Vdash$ ist eine Zwangsrelation zwischen den Elementen von S und den Formeln der Sprache. Wenn man diese Relation für die Aussagenvariablen definiert, muss die folgende Bedingung berücksichtigt werden:

Bedingung 1

$$R0ab \text{ und } a \Vdash p_i \Rightarrow b \Vdash p_i.$$

Für zusammengesetzte Aussagen ist diese Relation folgendermaßen definiert:

Definition 1

$$a \Vdash A \wedge B \Leftrightarrow a \Vdash A \text{ und } a \Vdash B;$$
$$a \Vdash A \vee B \Leftrightarrow a \Vdash A \text{ oder } a \Vdash B.$$
$$a \Vdash A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall b \, \forall c \, (Rabc \Rightarrow (b \Vdash A \Rightarrow c \Vdash B)).$$

Eine Formel A ist genau dann in einem E+ -Modell gültig, wenn dort $0 \Vdash A$ gilt. Eine Formel ist genau dann *allgemeingültig*, wenn sie in allen E+ -Modellen gültig ist.

Bekanntlich ist eine beliebige Formel der Sprache L(E+) genau dann ein Theorem des Systems **E**+, wenn sie ein Theorem des Systems **E** ist. Mit anderen Worten: **E**+ ist ein selbständiges System, in dessen Rahmen man *alle* positiven Theoreme aus **E** ableiten kann. Außerdem sind alle Axiome und Schlussregeln aus **E**+ auch *intuitionistisch akzeptabel* in dem Sinne, dass man ein Theorem der intuitionistischen Aussagenlogik **I** erhält, wenn man in einem beliebigen Theorem aus **E**+ alle "Pfeile" durch "Hufeisen" ersetzt. Davon kann man sich leicht überzeugen. Deswegen kann das System **E**+ als positiver Teil der relevanten intuitionistischen Systeme dienen, die ich aufbauen will. Es bleibt nur noch, **E**+ durch Schemata für einen Negationsoperator zu ergänzen und die Semantik entsprechend zu modifizieren.

Eine allgemeine Strategie für den Aufbau intuitionistischer Systeme des E-Typs lässt sich also folgendermaßen formulieren: Begonnen wird mit dem System **E**+ und seiner Semantik. Danach wird die propositionale Konstante **f** in die Sprache eingeführt. Ich benutze diese Konstante für die Anwendung einer *effektiven heuristischen Methode*, die die Eigenschaften der Negation des entsprechenden Systems aufzuklären hilft. Wie schon Johansson gezeigt hat, bekommt man für ein System eine *minimale Negation*, die mit Hilfe der Definition $\sim A \Leftrightarrow A \rightarrow \mathbf{f}$ definiert werden kann (siehe ausführlicher in [Johansson1936]), wenn man die Konstante **f** zur Sprache einer positiven Logik hinzufügt und keine besonderen Axiome für **f** formuliert. Wenn man weitere spezielle Axiome für **f** annimmt, so bekommt man weitere Typen von Negationen. Ich formuliere dementsprechend einige Systeme mit der Konstanten **f** als Ausgangssymbol (**f**-Systeme), und für jedes dieser Systeme baue ich ein entsprechendes System mit der Negation als Ausgangssymbol (N-Systeme) auf. Wenn man in einem beliebigen Theorem eines N-Systems jedes Vorkommen einer Formel ~A durch die Formel $A \rightarrow \mathbf{f}$ ersetzt, so bekommt man ein Theorem des entsprechenden **f**-Systems. Auch die umgekehrte Aussage gilt: Wenn man in einem Theorem eines **f**-Systems alle Vorkommen einer Formel $A \rightarrow \mathbf{f}$ durch die Formel ~A ersetzt und alle anderen Vorkommen der Konstanten **f** durch eine beliebige Aussagenvariable, so bekommt man ein Theorem des entsprechenden N-Systems.

Wir erhalten also die Sprache L(Ef), wenn wir zum Alphabet der Sprache L(E+) eine Konstante **f** hinzufügen. Damit bekommen wir ein System $\mathbf{ME_f}$, das durch die Axiome und Schlussregeln des Systems **E+** bestimmt wird. Eine Negation läßt sich im Rahmen von $\mathbf{ME_f}$ folgendermaßen durch den Pfeil ($\rightarrow$) und "das Falsche" (**f**) definieren:

Definition 2

$\sim A \Leftrightarrow A \rightarrow \mathbf{f}.$

Ein ME-Modell ist eine Struktur $< 0, S, N, R, \Vdash >$, wobei 0, S, R so wie im E+ -Modell sind und $N \subseteq S$ gilt (dabei kann N leer sein). Außerdem gilt die folgende Bedingung:

Bedingung 2

$R0ab$ und $a \in N \Rightarrow b \in N$.

Ich führe auch die folgende Definition der Zwangsrelation für die Konstante **f** ein:

Definition 3

$a \Vdash \mathbf{f} \Leftrightarrow a \in N.$

Der nichtformale Sinn dieser semantischen Konstruktion ist ganz durchsichtig. Die Menge N, die man von der Menge S abtrennt, kann man in der relevanzlogischen Tradition als die Menge der widersprüchlichen "Welten" verstehen. Da es um eine Semantik für eine Logik vom intuitionistischen Typ geht, sollen die "möglichen Welten" selbst als theoretische Konstruktionen behandelt werden. Mit anderen Worten: Eine theoretische Konstruktion ist genau dann ein Element der Menge N, wenn diese Konstruktion widersprüchlich ist; d.h., wenn sie eine widersprüchliche Aussage enthält (beispielsweise 1=2). In diesem Fall stellt die Konstante **f** gerade diese widersprüchliche Aussage dar. Die Definition 3 hat also den folgenden Sinn: **f** ist in einer Welt genau dann wahr, wenn diese Welt widersprüchlich ist (d.h. eine widersprüchliche Theorie darstellt). Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass das Vorhandensein der widersprüchlichen Welten in relevanzlogischen Modellstrukturen nichts Ungewöhnliches ist. Im Gegenteil, es ist geradezu ein kennzeichnendes Merkmal relevanzlogischer semantischer Analyse, widersprüchliche Elemente als Bestandteile der semantischen Modelle zuzulassen (ausführlicher siehe dazu z.B. [Urquhart1972], [Routley&Meyer1973], [Voishvillo1988]).

Weiterhin spielen die folgenden Theoreme des Systems $\mathbf{ME_f}$ eine wichtige Rolle, sie erhellen einige wesentliche Eigenschaften der minimalen relevanten Negation (Definition 2).

(1) $(A \to B) \to ((B \to \mathbf{f}) \to (A \to \mathbf{f}))$
(2) $(A \to B) \to ((A \to (B \to \mathbf{f})) \to (A \to \mathbf{f}))$
(3) $(A \to (A \to \mathbf{f})) \to (A \to \mathbf{f})$
(4) $(A \to \mathbf{f}) \to (((A \to \mathbf{f}) \to B) \to B)$
(5) $(A \to B) \to (((A \to B) \to \mathbf{f}) \to \mathbf{f})$
(6) $(A \to \mathbf{f}) \to (((A \to \mathbf{f}) \to \mathbf{f}) \to \mathbf{f})$
(7) $(A \to ((B \to \mathbf{f}) \to \mathbf{f})) \to ((B \to \mathbf{f}) \to (A \to \mathbf{f}))$
(8) $((A \to \mathbf{f}) \wedge (B \to \mathbf{f})) \to ((A \vee B) \to \mathbf{f})$

Die Formeln, die man aus (1)-(8) durch die Ersetzung von $A \to \mathbf{f}$ durch ~A bekommt, müssen also Theoreme des entsprechenden N-Systems **ME** sein, das ich gleich formulieren werde. Dabei muss die Tatsache berücksichtigt werden, dass die Formeln

(9) $A \to ((A \to \mathbf{f}) \to \mathbf{f})$
(10) $(A \to (B \to \mathbf{f})) \to (B \to (A \to \mathbf{f}))$

keine Theoreme von $\mathbf{ME_f}$ sind. Tatsächlich sind die entsprechenden positiven Formeln $A \to ((A \to B) \to B)$ und $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ keine Theoreme von **E**+ (und von **E**), und es gibt in $\mathbf{ME_f}$ keine speziellen Axiome für **f**, die es ermöglichen würden, (9) und (10) abzuleiten.

Das System **ME** erhält man, wenn man die positive Logik **E**+ durch die folgenden Axiomenschemata für die Negation ergänzt:

ME13 $(A \to {\sim}A) \to {\sim}A$
ME14 $(A \to B) \to ({\sim}B \to {\sim}A)$
ME15 ${\sim}A \to (({\sim}A \to B) \to B)$
ME16 $(A \to B) \to {\sim}{\sim}(A \to B)$
ME17 $({\sim}A \wedge {\sim}B) \to {\sim}(A \vee B)$.

Einige spezielle Erläuterungen sind bezüglich des Schemas ME15 nötig. Einerseits *muss* ME15 als ME-Axiom aufgenommen werden, weil sein **f**-Analogon - die Formel (4) - ein Theorem von $\mathbf{ME_f}$ ist. Andererseits kann die Annahme dieses Schemas ziemlich zweifelhaft erscheinen, weil es dem "Geist" des Systems **E** augenscheinlich nicht entspricht. Das Hauptproblem besteht darin, dass ME15 in **E** nicht beweisbar ist. Es ist aber ein Theorem des relevanzlogischen Systems **R** (*of relevant implication*). Bekanntlich unterscheiden sich die beiden Systeme darin, dass in **R** die *uneingeschränkte Permutation* der Antezedenten von implikativen Formeln zugelassen ist (und in **E** nicht). Entsprechend wird in **R** das Axiomenschema $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ (oder das äquivalente $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$) akzeptiert. Problematisch ist der ganze Sachverhalt vor allem deswegen, weil wegen dieses Axioms auch die Formel $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ in **R** beweisbar ist. Wenn wir die Tatsache berücksichtigen, dass durch $(A \rightarrow A) \rightarrow A$ in der Relevanzlogik "notwendig, dass A" (NA) definiert wird (siehe [Entailment1992], S. 135-137), so bekommen wir $A \rightarrow NA$, und es stellt sich heraus, dass jede wahre Aussage in **R** notwendig ist. Das heißt, in **R** können - im Gegensatz zu **E** - Modalitäten *nicht* (auf nichttriviale Weise) eingeführt werden. Deswegen kann eine adäquate Theorie der *logischen* Folgebeziehung die uneingeschränkte Permutation nicht zulassen. Da das System **E** den Anspruch darauf erhebt, die logische Folgebeziehung auszudrücken, ist die Permutation in diesem System nur in einer eingeschränkten Version vorhanden. Diese Einschränkung bezieht sich auf die Form der Antezedenten, die vertauscht werden dürfen. Es gilt nämlich: Die Permutation ist nur dann zugelassen, wenn der Antezedent, der vertauscht wird, selbst eine implikative Formel ist (d.h. eine Behauptung über die Folgebeziehung ist). Deswegen gilt in **E** anstelle von $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$ die Formel E4. In **E** ist auch die Formel $(A \rightarrow B) \rightarrow N(A \rightarrow B)$ ein Theorem, was bedeutet, dass jede gültige Behauptung über die Folgebeziehung notwendig ist.

Wenn wir jetzt aber ME15 ausführlicher betrachten, so können wir zunächst feststellen, dass die Aufnahme dieses Schemas keine willkürliche Entscheidung ist. Wir *müssen* dieses Schema akzeptieren, weil bestimmte Eigenschaften der E+ -Implikation zusammen mit der Definition 2 uns dazu zwingen. Schließlich ist (4) bereits innerhalb von E+ beweisbar. Das bedeutet allerdings, dass in **ME** nicht nur die Permutation von Formeln der Form $A \rightarrow B$ (wie in **E**) zugelassen ist, sondern auch die von Formeln der Form ~A. Die Formel $(A \rightarrow (\sim B \rightarrow C)) \rightarrow (\sim B \rightarrow (A \rightarrow C))$ sowie die Formel $\sim A \rightarrow ((\sim A \rightarrow \sim A) \rightarrow \sim A)$ ($\sim A \rightarrow N\sim A$ - jede wahre negative Aussage ist notwendig) sind auch ME-Theoreme.

Eine tiefere Überlegung führt jedoch zu dem Schluss, dass diese Sachlage die oben erwähnten Prinzipien der E-Systeme nicht verletzt, und dass man sie hätte voraussehen können. Immerhin beschäftigt man sich in **ME** mit *einer Negation vom intuitionistischen Typ*, und wie man zeigen kann, sind die Aussagen, deren Hauptoperator eine intuitionistische Negation ist, keine Aussagen faktischen Charakters (kontingente Aussagen). Mit jeder Behauptung der Form ~A ist im Intuitionismus *ein Schluss* verbunden, nämlich die Ableitung eines Widerspruchs aus A. Mit anderen Worten: Man kann im Intuitionismus nur dann ~A behaupten, wenn aus A ein Widerspruch *logisch folgt* (Definition 2 hat eigentlich denselben Sinn). Das ist im reinen **E** anders, weil die Negation in **E** eine Negation der klassischen Art ist, also können die negativen Aussagen des Systems **E** kontingente Aussage faktischen Charakters sein. Deswegen ist ME15 kein Axiomenschema. Innerhalb von **ME** erweitert ME15 das im E+ -Theorem E4 (der eingeschränkten Permutation) versteckte Prinzip auf die intuitionistischen Aussagen. Damit wird der wesentliche Unterschied zwischen intuitionistischen und klassischen Negationen noch anschaulicher.

Die Semantik für **ME** bekommt man, indem die Definition 3 durch die folgende ersetzt wird:

Definition 4

$$a \Vdash \sim A \Leftrightarrow \forall b \, \forall c \, (Rabc \Rightarrow (b \Vdash A \Rightarrow c \in N)).$$

Diese Definition gibt die nichtformale Auffassung der Negation im Intuitionismus wieder. N stellt ja die Menge der widersprüchlichen "Welten" dar. Die Definition 4 besagt also, dass ~A genau dann wahr ist, wenn die Annahme von A zu einem Widerspruch führt.

Betrachten wir jetzt einen bemerkenswerten Unterschied zwischen der Semantik für **E**+ und der Semantik für das ganze **E**. Dieser wurde zuerst in [Maximova1973] formuliert. Ein E-Modell ist nach Maximova eine Struktur (ein Pentupel) $< P, S, R, g, \Vdash >$, wobei $P \subseteq S$. P entspricht hier dem 0 des E+ -Modells und ist an der Definition der Allgemeingültigkeit von Formeln wesentlich beteiligt. Maximova weist darauf hin, dass man in E-Modellen nicht, wie in E+ -Modellen, nur *ein* Element (0) aus der Menge S auszeichnen kann, man muss unbedingt eine *Untermenge* P herausgreifen. Man braucht das, um die Formel $\sim p \vee ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ falsifizieren zu können. Wenn wir nur ein 0 als ausgezeichnete Welt für die Verifikation der Formeln in E-Modellen aussondern würden, so würde diese Formel zur E-Tautologie (siehe auch [Entailment1992], S. 172). Diese Formel ist aber kein E-Theorem (obwohl sie ein R-Theorem ist). Mit P als einer *Menge* ausgezeichneter Welten lässt sich $\sim p \vee ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ ganz einfach falsifizieren. Die Aufnahme von P macht die Formulierung einiger semantischer Postulate allerdings etwas komplizierter. Das Problem existiert innerhalb der E+ -Modelle nicht, weil **E**+ eine *positive* Logik ist, deswegen darf man sich in der Semantik für **E**+ auch auf nur eine ausgezeichnete Welt beschränken.

Es ist interessant, dass die Formel $\sim p \vee ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ in der oben formulierten Semantik für **ME** nicht allgemeingültig ist. Und wirklich: Angenommen, $\sim p \vee ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$ ist nicht ME-allgemeingültig. Das heißt, es gibt ein ME-Modell derart, dass $0 \Vdash \sim p \vee ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$. Mit Hilfe von Definition 1 und Definition 4 bekommen wir:

(*) $\exists a \, \exists b \, (R0ab$ und $a \Vdash p$ und $b \notin N)$ und $\exists c \, \exists d \, (R0cd$ und $c \Vdash p \rightarrow p$ und nicht $(d \Vdash p))$.

Betrachten wir das folgende ME-Modell:

$S' = < 0, S, N, R, \Vdash >$, wobei $S = \{0, a, b, c\}$; $N = \varnothing$; $R = \{<0ab>, <000>, <aaa>, <bbb>, <ccc>, <0aa>, <0bb>, <0cc>, <a0a>, <b0b>, <c0c>, <abb>, <a0b>, <aab>\}$; und außerdem gilt: nicht ($0 \Vdash p$), $a \Vdash p$, $b \Vdash p$, nicht ($c \Vdash p$).

S' ist tatsächlich ein ME-Modell, d.h., die Postulate p1-p5 und die Bedingungen 1 und 2 sind erfüllt. Es gilt nun aber: R0ab und $a \Vdash p$ und nicht ($b \Vdash N$) und R0cc und $c \Vdash p \to p$ und nicht ($c \Vdash p$). (*) ist also in diesem ME-Modell erfüllt, und demnach ist $\sim p \vee ((p \to p) \to p)$ in ihm widerlegt. Das heißt auch, dass in der Semantik für **ME** nur eine Welt 0 zur Verifizierung der Formeln ausreicht, was die ganze semantische Konstruktion vereinfacht.

Innerhalb der ME-Modelle kann man auf die übliche Weise die relevante logische Folgebeziehung für beliebige Formeln von **ME** definieren:

Definition 5

$$A \vDash_{ME} B \Leftrightarrow \forall S\ \forall a \in S\ (a \Vdash A \Rightarrow a \Vdash B).$$

Am Ende dieses Abschnitts will ich darauf hinweisen, dass, obwohl die Formeln $A \to \sim\sim A$ und $(A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$ keine Theoreme des Systems **ME** sind, in diesem System ihre abgeschwächten Varianten beweisbar sind: $\sim A \to \sim\sim\sim A$ und $(A \to \sim\sim B) \to (\sim B \to \sim A)$.

3. Die relevante intuitionistische Logik IE

Wie schon erwähnt wurde, sind einige Formeln keine Theoreme des Systems **ME**, für die es wünschenswert wäre, sie als logisch akzeptierte Prinzipien im System zu haben. (Beispielsweise sind $A \to \sim\sim A$ und $(A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$ solche Formeln.) Ein tieferliegender Grund dafür ist, dass im System **E**+ (sowie auch in **E**) die unbegrenzte Permutation der Antezedenten implikativer Formeln unzulässig ist. Es ist nur gestattet, Formeln zu vertauschen, die Behauptungen über die Folgebeziehung sind (Behauptungen der Form $A \to B$). Das entsprechende Axiom ist E4. Wenn wir in diesem Axiom für C und/oder D die Konstante **f** einsetzen, so bekommen wir (7) als ME_f -Theorem, und entsprechend $\sim A \to \sim\sim\sim A$ und $(A \to \sim\sim B) \to (\sim B \to \sim A)$ als ME-Theoreme. Wenn man aber $A \to \sim\sim A$ und $(A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$ als logisch gültige Prinzipien haben will, so muss man sie als Axiome aufnehmen.

Man bekommt die **f**-Formulierung des Systems der relevanten intuitionistischen Folgebeziehung - $\mathbf{IE_f}$ -, wenn man zu den Axiomenschemata von **E**+ das folgende Schema hinzufügt:

fE13 $\quad A \to ((A \to \mathbf{f}) \to \mathbf{f})$.

Das System **IE**, in welchem die Negation ein Grundoperator ist, bekommt man, wenn man im System **ME** die Schemata ME16 und ME17 durch das folgende ersetzt:

IE16 $\quad A \rightarrow {\sim\sim}A$.

Die Semantik für $\mathbf{IE_f}$ und **IE**: Ein IE-Modell erhält man aus einem ME-Modell, indem man zusätzlich zu den Postulaten p1-p5 das folgende Postulat annimmt:

p6 $\quad c \notin N$ und $Rabc \Rightarrow Rbac$.

Alle anderen Definitionen und Postulate bleiben unverändert. Wenn wir jetzt noch einmal zur Formel $\sim p \vee ((p \rightarrow) \rightarrow p)$ zurückkehren, so wird diese Formel nun in einem IE-Modell S" widerlegbar, welches man wegen des Postulats p6 aus dem ME-Modell S' oben durch das Hinzufügen von <bab> zur Definition der Relation R erhält.

Was die Permutation betrifft, so ist **IE** sogar "liberaler" als **ME**. Es zeigt sich, dass man in **IE** (genauso wie in $\mathbf{IE_f}$) nicht nur Formeln der Form $A \rightarrow B$ oder $\sim A$ vertauschen darf, sondern auch die Permutation *beliebiger* Antezedenten gestattet ist, wenn der letzte Konsequent die immer falsche Aussage (die Konstante **f**) darstellt. Für $\mathbf{IE_f}$ weist das Theorem $(A \rightarrow (B \rightarrow \mathbf{f})) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow \mathbf{f}))$ darauf hin. In **IE** ist ebenfalls eine Formel beweisbar, die diesen Umstand ausdrückt, nämlich $A \rightarrow ((A \rightarrow {\sim}L) \rightarrow {\sim}L)$ (oder die ihr äquivalente $(A \rightarrow (B \rightarrow {\sim}L)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow {\sim}L)))$, wobei L ein IE-Theorem der Form $C \rightarrow D$ oder $\sim C$ ist.

Der Aufbau der relevanten Varianten der intuitionistischen Logik hat uns zu einigermaßen unvorhergesehenen Resultaten geführt. Obwohl die Menge der Theoreme der intuitionistischen Aussagenlogik eine Untermenge der Menge der Theoreme der klassischen Aussagenlogik bildet, ist die analoge Behauptung bezüglich der Systeme **E** und **IE** (und auch **ME**) falsch. Mit anderen Worten ist es unmöglich, eine relevante Variante der intuitionistischen Logik (vom E-Typ) nur dadurch zu erhalten, dass man die Formel ${\sim\sim}A \rightarrow A$ verwirft. Man muss auch ME15 hinzufügen, das selbst kein E-Theorem ist, und doch ist eine solche Erweiterung durch wesentliche Merkmale der Negation intuitionistischen Typs und der Implikation des E-Typs bedingt.

Anmerkungen

* Der vorliegende Beitrag ist wesentlich eine Zusammenfassung einiger Ergebnisse, die in meinem Buch [Shramko1999], Kapitel 4 ausführlich dargestellt sind und auf dem 4. GAP-Kongress "*Argument und Analyse*" vorgetragen wurden. Das Buch wurde während meines Forschungsaufenthaltes an der Humboldt-Universität Berlin (1996-1998) im Rahmen eines Humboldt-Forschungsstipendiums geschrieben. Ich bedanke mich bei der *Alexander von Humboldt-Stiftung* für die kontinuierliche und hilfreiche Unterstützung meiner Forschungsarbeit.

Literatur

[Entailment1975] A. R. Anderson and N. D. Belnap, Jr. *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*, v. 1. Princeton University Press, Princeton, 1975

[Entailment1992] A. R. Anderson, N. D. Belnap, Jr. and J. M. Dunn. *Entailment. The Logic of Relevance and Necessity*, v 2. Princeton University Press, Princeton, 1992

[Johansson1936] I. Johansson. Der Minimalkallül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, *Compositio Math.*, 4:119-136, 1936

[Maximova1973] L. L. Maximova. A semantics for the calculus E of entailment, *Bulletin of the Section of Logic*, 2:18-21. 1973

[Meyer1979] R. K. Meyer. Career induction stops here (and here = 2), *Journal of Philosophical Logic*, 8:361-371, 1979

[Routley&Meyer1972] R. Routley and R. K. Meyer. The semantics of entailment III, Journal of Philosophical Logic, 1:192-208, 1972

[Routley&Meyer1973] R. Routley and R. K. Meyer. The semantics of entailment I, in: H. Leblanc (ed.) *Truth, Syntacs and Modality*, North-Holland Publishing Company, 1973, pp. 199-243

[Shramko1998] Y. Shramko. A philosophically plausible modified Grzegorczyk semantics for first-degree intuitionistic entailment, *Logique et Analyse*, 161-162-163, 1998, pp. 167-188

[Shramko1999] Y. Shramko. *Intuitionismus und Relevanz*, Logos-Verlag, Berlin, 1999

[Shramko2000a] Y. Shramko. American plan for intuitionistic logic 1: an intuitive background, in: Timothy Childers (ed.) *The Logica Yearbook 1999*, Filosofia, Prague, 2000, pp. 53-64

[Shramko2000b] Y. Shramko. American plan for intuitionistic logic 2: generalized Kripke models, *Logical Studies*, No. 5, 2000 (Online Journal, ISBN 5-85593-128-5, http://www.logic.ru/LogStud/05/LS5.html)

[Sinowjew&Wessel1975] A. Sinowjew und H. Wessel. Logische Sprachregeln, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975

[Urquhart1972] A. Urquhart. Semantics for relevant logics, *Journal of Symbolic Logic*, 41:159-166, 1976

[Voishvillo1988] E. K. Voishvillo. Filosofsko-metodologicheskie aspekty relevantnoj logiki. Izdatelstvo MGU, Moskva, 1988